20. tétel

Lineáris egyenletrendszer mátrixegyenletes alakja

Lineáris egyenletrendszer mátrixegyenletes alakja, a megoldhatóság és az oszlopok alterének kapcsolata. Összefüggés az egyértelmű megoldhatóság, az egyenletek és ismeretlenek száma között. Az egyértelmű megoldhatóság feltétele n × n méretű együtthatómátrix esetén

**Lineáris egyenletredszer mátrixegyenletes alakja**

Paraszti (chatgpt) módon

A lineáris egyenletrendszer mátrixegyenletes alakja egy tömör, algebrai formában történő leírása az egyenletrendszernek, ahol az ismeretlenek és az egyenletrendszer együtthatói mátrixokkal vannak kifejezve.

Matekos módon:

Legyen adott egy lineáris egyenletrendszer, amely a következő formában írható fel:

∑nj=1aijxj=bi(i=1,2,…,m)

Legyen az aij az egyenletrendszer együtthatói

Xj az ismeretlenek

Bi az egyenletrendszer jobb oldalán szereplő konstansok

Ezt a mátrixegyenletet felírhatjuk Ax=b formában is, ahol az A az együtthatómátrix,

x a változók oszlopvektora, és b az eredményvektor

A képen szöveg, Betűtípus, fehér, sor látható

Automatikusan generált leírás

**TEHÁT ez a cucc egy fancy egyenletrendszer leírási módja.**

**Megoldhatóság:**

Egyenletrendszer akkor és csak akkor megoldható, ha

az együtthatóiból képzett mátrix determinánsa nem nulla,

az együtthatóiból képzett mátrixnak több sora van mint oszlopa (ismeretlene),

nincs az egyenletek között ellentmondás

**alterek és oszlopok közti kapcsolat:**

Ha A oszlopai A1 , . . ., akkor (∃x : Ax = b) ⇐⇒ (b ∈ ⟨A1 , . . .⟩) ⇐⇒ (⟨A1 , . . .⟩ = ⟨b, A1 , . . .⟩) ⇐⇒ (dim⟨A1 , . . .⟩ = dim⟨b, A1 , . . .⟩) ⇐⇒ (r(A) = r(A|b))

BIZ: Az első két formula mindegyike azt jelenti, hogy b előáll az A1 , . . . oszlopok lineáris kombinációjaként. Ha b∈ ⟨A1 , . . .⟩, akkor nyilván ⟨A1 , . . .⟩ = ⟨b, A1 , . . .⟩. Ha pedig ez utóbbi alterek megegyeznek, akkor a bal oldali altér tartalmazza b-t, azaz b ∈ ⟨A1 , . . .⟩. Tehát a harmadik formula is ugyanazt jelenti, mint az első kettő. A negyedik formula bal oldalán szereplő altér része a jobb oldalon szereplőnek, tehát a dimenziójuk pontosan akkor egyenlő, ha e két altér megegyezik. Ezért a negyedik formula is ekvivalens az eddigiekkel. A rang definíciója utáni megfigyelés (2) része ill. a rang és oszloprang egyenlősége miatt r(A) = o(A) = dim(A1 , . . .), és innen közvetlenül adódik az ötödik formula ekvivalenciája a negyedikkel.

**Állítás: Ha A∈R n×n : (Ax=b egyért. megoldható)⇐⇒(|A|!=0)**

Biz: ⇒: Indirekt bizonyítunk: tegyük fel, hogy |A| = 0. Láttuk, hogy ilyenkor A oszlopai nem lineárisan függetlenek, ezért A oszlopainak valamely nemtriviális lineáris kombinációja 0-t ad: ∃y != 0 : Ay = 0. Ezért ha x az Ax = b megoldása, akkor A(x + y) = Ax + Ay = b + 0 = b miatt x + y is megoldás. Tehát az Ax = b mátrixegyenletnek ha van is megoldása, az nem egyértelmű. Ez ellentmondás, tehát A oszlopai lin.ftn-ek, ezért |A| 6= 0.

⇐: Most azt tesszük fel, hogy |A| != 0. Ekkor A reguláris (azaz invertálható), így A−1 -zel szorozhatunk balról. Ezért Ax = b ⇐⇒ x = (A−1A)x = A−1 (Ax) = A−1 b , azaz x egyértelmű.